Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, 2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1) Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς. Να δειχθεί ότι η $f+g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής:
α) Με χρήση του $\varepsilon - \delta$ ορισμού.
β) Με χρήση του χαρακτηρισμού της ομοιόμορφης συνέχεις με ακολουθίες.

2) α) Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς. Δείξτε ότι η fg δεν είναι κατ' ανάγκη ομοιόμορφα συνεχής.
β) Αν οι $f, g : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς και φραγμένες, δείξτε ότι η fg είναι ομοιόμορφα συνεχής.

3) Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και περιοδική τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής.

4) Έστω $f : [a, \beta] \to [\gamma, \delta]$ και $g : [\gamma, \delta] \to \mathbb{R}$ ώστε οι f, g να είναι συνεχείς. Δείξτε ότι η $g \circ f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

5) Έστω $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση ώστε να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός. Να δείξετε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

6) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση ώστε να υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ και να είναι πραγματικοί αριθμοί. Να δείξετε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

7) Να εξεταστεί αν είναι ομοιόμορφα συνεχής καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις.
α) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 18x + 35$
β) $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
γ) $f : [0, \frac{\pi}{3}) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \tan x$
δ) $f : [0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \tan x$.
ε) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x \cos x$
στ) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \cos^5 x$.
ζ) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x^2 + a^2}$, όπου $a > 0$
η) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\cos(x^2)}{x+1}$.

8) Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής να δειχθεί ότι υπάρχουν $A, B > 0$ ώστε $|f(x)| \leq A|x| + B$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

9) Χρησιμοποιώντας το συμπέρασμα της προηγούμενης άσκησης να δειχθεί ότι αν $a > 1$ η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|^a$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.